

This question paper contains 4 printed pages!

Roll No. 264377

B.A./B.Sc. (Part-I)

1125/1175-II

105629

B.A./B.Sc. (Part-I) EXAMINATION, 2023

(Common for the faculties of Arts and Science)  
[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-I]  
(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-II

(Calculus)

Time Allowed : Three Hours

समय : 3 घण्टे

Note / सूचना :

(1) Attempt five questions in all, Selecting one question from each Unit.  
प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(2) All questions carry equal marks.  
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

(3) Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.  
प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

UNIT - 1 / इकाई - 1 ✓

1. (a) Show that Hyper Monic Series :  
हाइपर मोनिक श्रेणी के लिए सिद्ध करोकि :

$$\sum \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

(i) is convergent, when  $p > 1$   
अभिसारी है जब  $p > 1$

(ii) is divergent, when  $p \leq 1$   
अपसारी है जब  $p \leq 1$

(b) Test the convergence of the following series.  
निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए।

$$1 + \frac{3}{7}x + \frac{3.6}{7.10}x^2 + \frac{3.6.9}{7.10.13}x^3 + \frac{3.6.9.12}{7.10.13.16}x^4 + \dots$$

2. (a) Show that the following series is conditionally convergent :  
प्रदर्शित कीजिये कि निम्न श्रेणी सह-प्रतिबंध अभिसारी है :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} - \frac{1}{a+3x} + \dots$$

(b) Expand the following function in power series :

$$f(x) = \log(1+x)$$

निम्नलिखित फलन का घात श्रेणी में प्रसार कीजिए :

$$f(x) = \log(1+x)$$

## UNIT - 2 / इकाई - 2 ✓

3. (a) Find the radius of curvature of the cycloid  $x = a(\theta + \sin\theta)$ ,  $y = a(1 - \cos\theta)$  at any point  
(i)  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ; (ii)  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

चक्रज  $x = a(\theta + \sin\theta)$ ,  $y = a(1 - \cos\theta)$  के किसी बिन्दु (i)  $\theta = \frac{\pi}{3}$  पर (ii)  $\theta = \frac{\pi}{3}$  पर वक्रता त्रिज्या का मान ज्ञात करो।

- (b) Show that the chord of curvature of the parabola is four times the focal distance of the point if it passes through the focus.  
सिद्ध कीजिए की परवलय की वक्रता जीवा बिन्दु की नाभिय दूरी की चार गुनी होती है, यदि यह नाभि से गुजरती है।

4. (a) Find the value of  $n$  if  $\theta = t^n e^{-r^2/4t}$  such that  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^n \frac{\partial \theta}{\partial r} \right\} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ .

यदि  $\theta = t^n e^{-r^2/4t}$  जैसे कि  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^n \frac{\partial \theta}{\partial r} \right\} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$  है, तो  $n$  का मान ज्ञात कीजिए।

- (b) If  $u = \tan^{-1} \left( \frac{y^2}{x} \right)$  then prove that :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin 2u \sin^2 u$$

यदि  $u = \tan^{-1} \left( \frac{y^2}{x} \right)$  तो सिद्ध करो कि :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin 2u \sin^2 u$$

## UNIT - 3 / इकाई - 3

5. (a) Find the asymptotes of the following curve :

निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

$$(x-2y)^2(x-y) - 4y(x-2y) - (8x+7y) = 0$$

- (b) Show that the envelope of the straight line joining the extremities of a pair of semi conjugate

diameters of the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  is the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$ .

सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  के अर्ध संयुग्मी व्यासों के सिरों को मिलाने वाली रेखा का अन्वालोप

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2} \text{ है।}$$

6. (a) Find the minimum value of the function  $u = x^2 + y^2 + z^2$  when  $xy + yz + zx = 3a^2$ .  
 फलन  $u = x^2 + y^2 + z^2$  का न्यूनतम मान ज्ञात करो जबकि  $xy + yz + zx = 3a^2$ ।
- (b) Trace the curve  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ .  
 वक्र  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  का अनुरेखण कीजिये।

UNIT - 4 / इकाई - 4 ✓

7. (a) Prove that  $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ .

सिद्ध कीजिए :  $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

- (b) Evaluate  $\iiint_V x^2 dx dy dz$  where the region  $V$  is enclosed by the planes  $x=0, y=0, z=0$  and  $x+y+z=a$ .

मान ज्ञात कीजिए  $\iiint_V x^2 dx dy dz$  जहाँ क्षेत्र  $V$ , तलों  $x=0, y=0, z=0$  तथा  $x+y+z=a$  से घिरा हुआ है।

8. (a) Change the order of integration in the following integral :

$$\int_0^{4a} \int_{x^2/4a}^{2\sqrt{ax}} f(x, y) dx dy.$$

निम्न समाकल में समाकलन का क्रम परिवर्तित कीजिए।

$$\int_0^{4a} \int_{x^2/4a}^{2\sqrt{ax}} f(x, y) dx dy$$

- (b) Find the mass of a circular plate of diameter  $a$ , where density at any point is  $k$  times its distance from a fixed point on the circumference.

“ $a$ ” व्यास की वृत्ताकार प्लेट का द्रव्यमान ज्ञात करो, जिसका किसी बिन्दु पर घनत्व इसकी परिधि पर स्थित किसी स्थिर बिन्दु से दूरी का  $k$  गुना है।

UNIT - 5 / इकाई - 5

9. (a) Find the whole area of the curve.

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \text{ (Astroid)}$$

वक्र  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात करो।

- (b) Show that the upper half arc of the cardioid  $r = a(1 + \cos\theta)$  is bisected by the line  $\theta = \frac{1}{3}\pi$ .

प्रदर्शित करो कि कार्डिऑयड  $r = a(1 + \cos\theta)$  की ऊपरी अर्ध चाप रेखा  $\theta = \frac{1}{3}\pi$  द्वारा द्विभाजित होता है।

10. (a) Find the volume of the solid generated by the revolution of the curve  $(a-x)y^2 = a^2x$  about its asymptote.

वक्र  $(a-x)y^2 = a^2x$  को उसकी अनन्तस्पर्शी के चारों ओर घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करो।

(b) Find the surface of the solid formed by the revolution of the cardioid  $r = a(1 + \cos\theta)$  about the initial line.

कार्डिऑयड  $r = a(1 + \cos\theta)$  को प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष घुमाने से बने ठोस का पृष्ठ ज्ञात करो।

- o O o -