This question paper contains 4 printed pages. Roll No.....

UG0809-MAT-64T-256

Three/Four Year B.Sc./B.A. (Hons.) (Mathematical) Fourth Semester Examination, MAY-2025

(Faculty of Science)

Subject-MATHEMATICS

Advanced Analysis

Time Allowed : Three Hours **Maximum Marks: 120**

समय : तीन घंटे अधिकतम अंक : 120

No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answers precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

Answers to short answer-type questions must be given in sequential order. Similarly, all the parts of one question of descriptive part should be answered in one place in the answer-book.

लघुत्तरात्मक प्रश्नों के उत्तर प्रश्नों के क्रमानुसार ही देवें। इसी प्रकार किसी भी एक वर्णनात्मक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में एक ही स्थान पर क्रमानुसार हल करने चाहिए।

Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

Note:- *Question paper consists of **three** parts **A, B** and **C.***

*प्रश्न पत्र में तीन भाग **अ, ब** और **स** होंगे।*

Part-A: 20 marks भाग-अ: 20 अंक

***Part A** is compulsory having **10** very short answer-type questions **(with a limit of 20 words)** of **two** marks each. The first question is based on knowledge, understanding, and applications of the topics/text covered in the syllabus.*

*भाग **अ** में **दो** अंक के **10** अति लघु उत्तरीय प्रश्न **(20 शब्दों की सीमा के साथ)** अनिवार्य है। पहला प्रश्न पाठ्यक्रम में शामिल विषयों/पाठ के ज्ञान, समझ और अनुप्रयोगों पर आधारित है।*

Part-B: 20 marks भाग-ब: 20 अंक

***Part B** has of the paper shall consist of **04** questions **(with a limit of 150 words)** of **10** marks each. The candidate is required to attempt any **02** questions.*

*भाग **ब** के प्रश्न पत्र में **10** अंक के **04** प्रश्न **(150 शब्दों की सीमा के साथ)** है। परीक्षार्थी को कोई **02** प्रश्न हल करने हैं।*

Part-C: 80 marks भाग-स: 80 अंक

***Part C** of the question paper is divided into four units comprising question numbers 6-9. There is one descriptive question from each unit with internal choice. Each question will carry 20 marks.*

*प्रश्न पत्र के भाग **स** को प्रश्न संख्या 6-9 सहित चार इकाइयों में विभाजित हैं। प्रत्येक इकाई से आंतरिक विकल्प के साथ एक वर्णनात्मक प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न 20 अंक का हैं।*

Part-A/भाग-अ

1. (a) Define functionals : [10×2=20]

प्रक्रियात्मक फलन को परिभाषित कीजिए।

(b) Write Euler's equation for the extremals of the functional. $\phi[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$

प्रक्रियात्मक फलन $\phi[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$ के चरम फलन के लिए ऑयलर समीकरण लिखिये।

(c) Test for the extremum of the functional. $\phi[y(x)] = \int_0^1 \left(y^2 + x^2 y'\right)\, dx;\ y(0), y(1) = 0$

प्रक्रियात्मक फलन $\phi[y(x)] = \int_0^1 \left(y^2 + x^2 y'\right)\, dx;\ y(0), y(1) = 0$ के चरम फलन के लिए परीक्षण कीजिए।

(d) Define pointwise Convergence.

बिन्दुशः अभिसरण को परिभाषित कीजिए।

(e) Write the Cauchy criterian for uniform convergence of a sequence of functions.

फलनों के अनुक्रम के एकसमान अभिसरण के लिए कौशी-निकश शर्त लिखियें।

(f) Define sequence of partial sums.

आंशिक योग के अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

(g) If (x, d) be a metric space then prove that $\forall\ scx, s \neq \phi, (s, d)$ is also a metric spece.

यदि (x, d) दूरिक समष्टि है तो सिद्ध कीजिए कि $\forall\ scx, s \neq \phi, (s, d)$ भी एक दूरिक समष्टि होगी।

(h) Define closure of a set.

एक समुच्चय के संवरक को परिभाषित कीजिए।

(i) Let A be a subset of metric space *(x, d)*, then show that $A^\circ \subseteq A$, where A° is the derived set of A.

माना कि A दूरिक समष्टि *(x, d)* का एक उपसमुच्चय है, तब सिद्ध कीजिए कि $A^\circ \subseteq A$, जहाँ A° समुच्चय A का व्युत्पन्न समुच्चय हैं।

(j) Define connected metric space.

कनेक्टेड दूरिक समष्टि को परिभाषित कीजिए।

Part-B/भाग-ब

[10×2=20]

2. Find the extremal for the functional. $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x}dx$, $y(1) = 0, y(2) = 1$ [10]

प्रक्रियात्मक फलन $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x}dx$, $y(1) = 0, y(2) = 1$ के लिये चरम फलन ज्ञात कीजिए।

3. Test the series $\sum \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ for uniform convergence in [0,1]. [10]

अन्तराल $[0,1]$ में एकसमान अभिसरण के लिए श्रेणी $\sum \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ का परीक्षण कीजिये।

4. Let (x,d) be a metric space and A is a non-empty subset of x, then prove that [10]

$|d(x,A)-d(y,A)| \le d(x,y) \forall x, y \in A$

माना कि (x,d) एक दूरिक समष्टि है एवं A, x का एक अरिक्त उपसम्मुचय है, तो सिद्ध कीजिए कि

$|d(x,A)-d(y,A)| \le d(x,y) \forall x, y \in A$

5. Prove that any Continuous function 'f' from a Compact metric space (x,d) to another Compact Metric space (y,d) is bounded. that is, $f(x)$ is a bounded subset of y. [10]

सिद्ध कीजिए कि एक संहत दूरिक समष्टि (x,d) से दूसरे संहत दूरिक समष्टि (y,d) तक कोई भी संतत् फलन 'f' परिबद्ध होता है। अर्थात् $f(x)$, y का परिबद्ध उपसमुच्चय हैं।

Part-C/भाग-स

Unit-I/इकाई-I

[20×4=80]

6. Find the Curve joining two points which give the shortest possible time of descent under gravity. [Brachistochrone Problem] [20]

दो बिन्दुओं को मिलाने वाला वह वक्र ज्ञात कीजिए जो गुरूत्वाकर्षण के अधीन अवतरण का सबसे कम संभव समय लेता है।

OR/अथवा

Show that Shortest distance between the Circle $x^2 + y^2 = 1$ and the straight line $y = 4-x$ is $2\sqrt{2}-1$ and lies on $x = y$. [20]

प्रदर्शित कीजिए कि वृत $x^2 + y^2 = 1$ और सरल रेखा $y = 4-x$ के बीच न्यूनतम दूरी $2\sqrt{2}-1$ है तथा यह $x = y$ पर स्थित हैं।

Unit-II/इकाई-II

7. Discuss the uniform Convergence of the series in the interval [0,1] [20]

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$$

[0,1] अन्तराल में निम्न श्रेणी के एकसमान अभिसारी का विवेचन कीजिए।

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$$

OR/अथवा

Test for uniform Convergence and term by term integration of the following series: [20]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{\left(n+x^2\right)^2}$$

निम्न श्रेणी की एकसमान अभिसरण तथा पदशः समाकलनीय के लिए परीक्षण कीजिए :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{\left(n+x^2\right)^2}$$

Unit-III/इकाई-III

8. Prove that the set C of all Complex numbers is a metric space under [20]

$$d(z_1,z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{[(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)]^{1/2}}$$

सिद्ध कीजिए कि सम्बन्ध $d(z_1,z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{[(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)]^{1/2}}$ के अन्तर्गत सभी सम्मिक्षा संख्याओं का समुच्चय C एक दूरिक समष्टि होगा।

OR/अथवा

Prove that in a metric Space, every closed Sphere is a closed Set. [20]

सिद्ध कीजिए कि एक दूरिक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोलक एक संवृत समुच्चय होता हैं।

Unit-IV/इकाई-IV

9. Prove that any Compact subset of a metric Space is Closed and bounded. [20]

सिद्ध कीजिए कि एक दूरिक समष्टि का कोई भी संहत उपसमुच्चय संवृत और परिबद्ध होता है।

OR/अथवा

Let X and Y be Connected metric Spaces. Then prove that the product space $X \times Y$ is Connected. [20]

माना X तथा Y सम्बद्ध दूरिक समष्टियाँ हैं। तब सिद्ध कीजिए कि गुणन समष्टि $X \times Y$ भी सम्बद्ध दूरिक समष्टि हैं।

*****