

UG0803/UG9101

MAT-63T-201

Three/Four Year B.A./B.Sc. III Semester Examination, December-2024

(Common to UG0806/UG0810/UG9102/UG9103/UG9104/UG9105/UG9106/UG9107/UG9108/
UG9109/UG9110/UG9111/UG9112/UG9113)

(Faculty of Science)

Subject-Mathematics

(Real Analysis-I & Differential Equations-I)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks: 80

समय : तीन घंटे

अधिकतम अंक : 80

No supplementary answer-book will be given to any candidate. The candidates should write the answer precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जायेगी। परीक्षार्थियों को समस्त प्रश्नों के उत्तर मुख्य उत्तर पुस्तिका में ही लिखने चाहिए।

Answers to short answer-type questions must be given in sequential order. Similarly, all the parts of one question of descriptive part should be answered in one place in the answer-book.

लघुतरात्मक प्रश्नों के उत्तर प्रश्नों के क्रमानुसार ही दें। इस प्रकार किसी भी एक वर्णनात्मक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में एक ही स्थान पर क्रमानुसार हल करने चाहिए।

Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

Note:- Question paper consists of two parts A and B.

प्रश्न पत्र में दो भाग अ और ब होंगे।

Part-A: 20 marks भाग-अ: 20 अंक

Part A is compulsory having 10 very short answer-type questions (with a limit of 20 words) of two marks each. The first question is based on knowledge, understanding, and applications of the topics/text covered in the syllabus.

भाग अ में दो अंक के 10 अति लघु उत्तरीय प्रश्न (20 शब्दों की सीमा के साथ) अनिवार्य हैं। पहला प्रश्न पाठ्यक्रम में शामिल विषयों/पाठ के ज्ञान, समझ और अनुप्रयोगों पर आधारित है।

Part-B: 60 marks भाग-ब: 60 अंक

Part B of the question paper is divided into four units comprising question number 2-5. There is one descriptive question from each unit with internal choice. Each question will carry 15 marks.

प्रश्न पत्र का भाग ब प्रश्न संख्या 2-5 सहित चार इकाइयों में विभाजित है। प्रत्येक इकाई से आंतरिक विकल्प के साथ एक वर्णनात्मक प्रश्न है। प्रत्येक प्रश्न 15 अंक का।

1. Answer **all** parts of the question:

प्रश्न के सभी खण्डों के उत्तर दीजिए:

(a) Show that every open interval $[a, b]$ is a neighbourhood of each of its points.

प्रदर्शित कीजिए कि प्रत्येक विवृत अंतराल अपने प्रत्येक बिन्दु का प्रतिवेश होता है।

(b) Find the limit points of the set

$$S = \left\{ \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{4}{3}, \dots \right\}.$$

समुच्चय $S = \left\{ \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{4}{3}, \dots \right\}$ के सीमा बिन्दु ज्ञात कीजिए।

(c) If $I_n =]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, $n \in \mathbb{N}$, then show that $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ is not an open set.

यदि $I_n =]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, $n \in \mathbb{N}$, तब प्रदर्शित कीजिए कि $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ एक विवृत समुच्चय नहीं है।

(d) Find the limit points of the sequence $\left\langle (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\rangle$.

अनुक्रम $\left\langle (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\rangle$ के सीमा बिन्दु ज्ञात कीजिए।

(e) Show that the sequence $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ is a Cauchy sequence.

प्रदर्शित कीजिए कि अनुक्रम $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ एक कौशी अनुक्रम है।

(f) Show that the function $f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 1-x, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$ is continuous at $x = \frac{1}{2}$.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 1-x, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$ बिन्दु $x = \frac{1}{2}$ पर संतत है।

(g) Solve the following differential equation:

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए:

$$ydx + xdy + \frac{xdy - ydx}{xy} = 0$$

(h) Find the particular integral of the differential equation $(D^2 + 4D - 12)y = e^{3x}$

अवकल समीकरण $(D^2 + 4D - 12)y = e^{3x}$ का विशिष्ट समाकल ज्ञात कीजिए।

(i) Find the complementary function of the homogeneous differential equation

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^2$$

समजात अवकल समीकरण $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^2$ का पूरक फलन ज्ञात कीजिए।

(j) Find one of the part of the complementary function of the following differential equation:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - (x^2 - 2x) \frac{dy}{dx} + (x + 2)y = x^3 e^x$$

निम्नलिखित अवकल समीकरण के पूरक फलन का एक भाग ज्ञात कीजिए।

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - (x^2 - 2x) \frac{dy}{dx} + (x + 2)y = x^3 e^x$$

Attempt any two questions out of the following four questions.

निम्नलिखित चार प्रश्नों में से किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

2. Prove that every bounded and infinite set has atleast one limit point.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिबद्ध एवं अपरिमित समुच्चय का कम से कम एक सीमा बिन्दु अवश्य होता है।

3. Prove that the necessary and sufficient condition for a sequence $\langle x_n \rangle$ to be a convergent sequence is that $\langle x_n \rangle$ is bounded and has a unique limit point.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ को एक अभिसारी अनुक्रम होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि $\langle x_n \rangle$ परिबद्ध है तथा इसका अद्वितीय सीमा बिन्दु है।

4. Solve the following differential equation:

$$(x^3 y^3 + x^2 y^2 + xy + 1)ydx + (x^3 y^3 - x^2 y^2 - xy + 1)xdy = 0$$

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए।

$$(x^3 y^3 + x^2 y^2 + xy + 1)ydx + (x^3 y^3 - x^2 y^2 - xy + 1)xdy = 0$$

5. Solve the following differential equation:

$$x^4 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} - x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 1$$

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए।

$$x^4 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} - x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 1.$$

Attempt all questions.

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

6. (a) Prove that the intersection of a finite number of open sets is an open set.

सिद्ध कीजिए कि परिमित संख्या में विवृत समुच्चयों का सर्वनिष्ठ निर्धारण एक विवृत समुच्चय होता है।

- (b) Prove that a set is closed if and only if its complement is open.

सिद्ध कीजिए कि कोई समुच्चय एक संवृत समुच्चय होता है यदि और केवल यदि इसका पूरक समुच्चय एक विवृत समुच्चय है।

OR/अथवा

- (a) Prove that the derived set of any set is a closed set.

सिद्ध कीजिए कि किसी भी समुच्चय का व्युत्पन्न समुच्चय सदैव एक संवृत समुच्चय होता है।

- (b) Prove that the set R of real numbers is not a compact set.

सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R एक संहत समुच्चय नहीं है।

7. (a) Prove that the necessary and sufficient condition for a monotonically increasing sequence $\langle x_n \rangle$ to be convergent is that it is bounded and in that case $\lim x_n = \sup \{ \langle x_n \rangle \}$.

सिद्ध कीजिए कि एकदिष्ट वर्धमान अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ के अभिसरण के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि $\langle x_n \rangle$ परिबद्ध है तथा इस अवस्था में $\lim x_n = \sup \{ \langle x_n \rangle \}$.

- (b) Prove that the sequence $\langle x_n \rangle$, where $x_1 = \frac{1}{2}$ and $x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{3}$, $n \in N$ is convergent. Also find its limit.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$, जहाँ $x_1 = \frac{1}{2}$ तथा $x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{3}$, $n \in N$ एक अभिसारी अनुक्रम है। इसकी सीमा भी ज्ञात कीजिए।

OR/अथवा

✓ Prove that the necessary and sufficient condition for the $\langle x_n \rangle$ to be a convergent sequence is that it is a Cauchy sequence.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ एक अभिसारी अनुक्रम है यदि और केवल यदि $\langle x_n \rangle$ एक कॉशी अनुक्रम है।

✓ (b) Show that the sequence $\langle 1/n^3 \rangle$ is a Cauchy sequence.

प्रदर्शित कीजिए कि अनुक्रम $\langle 1/n^3 \rangle$ एक कॉशी अनुक्रम है

8. ✓ (a) Solve the following differential equation:

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए:

$$(xy^2 - x^2)dx + (3x^2y^2 + x^2y - 2x^3 + y^2)dy = 0$$

✓ (b) Solve the following differential equation:

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$$

OR/अथवा

(a) Solve the following linear differential equation:

निम्न रैखिक अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x \cos x$$

- (b) Solve the following differential equation:

निम्नलिखित अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए:

$$(D^2 - 9D + 18)y = e^{-3x}$$

9. (a) Solve the following differential equation:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (1 - \cot x) \frac{dy}{dx} - y \cot x = \sin^2 x$$

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (1 - \cot x) \frac{dy}{dx} - y \cot x = \sin^2 x$$

- (b) Solve the following differential equation:

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} - y \right) - 2x \frac{dy}{dx} + 2y + x^2 y = 0$$

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए:

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} - y \right) - 2x \frac{dy}{dx} + 2y + x^2 y = 0$$

OR/अथवा

- (a) Solve the following differential equation:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 4x^3 y = 4x^3 \sin x^2$$

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 4x^3 y = 4x^3 \sin x^2$$

- (b) Solve the following differential equation using method of variation of parameters:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^2 e^x$$

प्राचल विधि का प्रयोग करते हुए निम्न अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^2 e^x$$