

This question paper contains 7 printed pages.

Roll No. 134690.....

UG0803/UG9101

MAT-51T-101

5013

Three/Four Year B.A./B.Sc. I Semester

Examination - Dec. 2023

(Common to UG0806/UG0810/UG9102/UG9103/UG9104/UG9105/UG9106/
UG9107/UG9108/UG9109/UG9110/UG9111/UG9112/UG9113)

(Faculty of Science)

Subject – Mathematics

Discrete Mathematics & Optimization Techniques

Time Allowed: Three Hours

समय सीमा: तीन घंटे

Maximum Marks: 120

अधिकतम अंक: 120

No supplementary answer book will be given to any candidate. The candidates should write the answers precisely in the main answer book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जाएगी। परीक्षार्थियों को समस्त प्रश्नों के उत्तर मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही लिखने चाहिए।

Answers to short answer-type questions must be given in sequential order. Similarly, all the parts of one question of descriptive part should be answered in one place in the answer book.

लघुत्तरात्मक प्रश्नों के उत्तर प्रश्नों के क्रमानुसार ही दें। इसी प्रकार किसी भी एक वर्णनात्मक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में एक ही स्थान पर क्रमानुसार हल करने चाहिए।

Write your roll number on question paper before start writing the answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

Question paper consists of three parts A, B and C.

प्रश्न पत्र में तीन भाग अ, ब और स होंगे।

Part-A: 20 marks भाग-अ: 20 अंक

Part A is compulsory having 10 very short answer-type questions (with a limit of 20 words) of two marks each. The first question is based on knowledge, understanding, and applications of topics/text covered in the syllabus.

प्रश्न पत्र के भाग अ में दो अंक के 10 अति लघुउत्तरीय प्रश्न (20 शब्दों की सीमा के साथ) अनिवार्य हैं। पहला प्रश्न पाठ्यक्रम में शामिल विषयों/पाठ के ज्ञान, समझ और अनुप्रयोगों पर आधारित है।

Part-B: 20 marks भाग-ब: 20 अंक

Part B has 4 questions (with a limit of 150 words) of 10 marks each. The candidate is required to attempt any 2 questions.

प्रश्न पत्र के भाग ब में 10 अंक के 4 प्रश्न (150 शब्दों की सीमा के साथ) हैं। परीक्षार्थी को कोई भी 2 प्रश्न हल करने हैं।

Part- C: 80 Marks भाग-स: 80 अंक

Part C of the questions paper is divided into four units comprising question numbers 6-9. There is one descriptive question from each unit with internal choice. Each question will carry 20 marks.

प्रश्न पत्र के भाग स को प्रश्न संख्या 6-9 सहित चार इकाइयों में विभाजित हैं। प्रत्येक इकाई से आंतरिक विकल्प के साथ एक वर्णनात्मक प्रश्न है। प्रत्येक प्रश्न 20 अंक का है।

1. Attempt all questions -

[10×2=20]

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए -

(a) Define partial order relation.

आंशिक क्रम सम्बन्ध की परिभाषा दीजिए।

(b) If B is a Boolean algebra, then for all elements $a, b \in B$, prove that $a + ab = a$.

यदि B एक बूलिय बीजगणित है, तब सभी अवयवों $a, b \in B$ के लिए, सिद्ध कीजिए की $a + ab = a$.

(c) Determine the negation of bi-conditional statement $p \leftrightarrow q$.

द्विप्रतिबन्धी प्रकथन $p \leftrightarrow q$ का निषेध ज्ञात कीजिए।

(d) Determine the generating function of the numeric function $a_r = C(r + 5, r)$, $r \geq 0$.

संख्यांक फलन $a_r = C(r + 5, r)$, $r \geq 0$ का जनक फलन ज्ञात कीजिए।

(e) Solve the recurrence relation:

$$a_r = a_{r-1} + 2a_{r-2}, r \geq 2$$

पुनरावृत्ति सम्बन्ध $a_r = a_{r-1} + 2a_{r-2}$, $r \geq 2$ का हल ज्ञात कीजिए।

(f) Define complete bipartite graph.

पूर्ण द्विखण्डी ग्राफ की परिभाषा दीजिए।

(g) A k -regular graph G has n vertices. Find the number of edges in G.

एक k -नियमित ग्राफ G में n शीर्ष हैं। G में कोरों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(h) Define self complementary graph.

स्वयंपूरक ग्राफ की परिभाषा दीजिए।

(i) Define binary tree.

द्विचर वृक्ष की परिभाषा दीजिए।

(j) Define basic feasible solution.

आधारी सुसंगत हल की परिभाषा दीजिए।

PART-B / भाग-ब

Attempt any two questions.

[2×10=20]

किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

2. Let R be the relation on the set N of natural numbers defined by xRy if and only if $x + 3y = 12$;

$x, y \in N$. Show that R is transitive but neither reflexive nor symmetric.

माना R प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर परिभाषित कोई सम्बन्ध है, जहाँ xRy यदि और केवल यदि

$x + 3y = 12$; $x, y \in N$ । प्रदर्शित कीजिए कि R संक्रामक संबंध है, परन्तु स्वतुल्य एवं सममित नहीं।

3. Find the generating function of the sequence

$\langle 0^2, 1^2, 2^2, \dots, n^2, \dots \rangle$.

अनुक्रम $\langle 0^2, 1^2, 2^2, \dots, n^2, \dots \rangle$ का जनक फलन ज्ञात कीजिए।

4. Let G be a simple connected graph on n vertices and m edges. Prove that G has a Hamiltonian cycle,

if $m \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$.

माना G एक सरल सम्बद्ध ग्राफ है, जिसमें n शीर्ष तथा m कोरें हैं। सिद्ध कीजिए कि G में एक हैमिल्टोनियन

चक्र विद्यमान है, यदि $m \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$ ।

5. Prove that the set of all convex combinations of a finite number of points X_1, X_2, \dots, X_n is a

convex set.

सिद्ध कीजिए कि परिमित बिन्दुओं X_1, X_2, \dots, X_n के समस्त अवमुख संघों का समुच्चय एक अवमुख

समुच्चय होता है।

PART-C/भाग-स

Unit-1/इकाई-1

Attempt all questions.

[4×20=80]

सभी प्रश्नों को हल कीजिए।

6. (a) If (L, \leq) is a distributive lattice, then prove that for all elements $a, b, c \in L$

यदि (L, \leq) एक बंटनात्मक जालक है, तब सिद्ध कीजिए कि सभी अवयवों $a, b, c \in L$ के लिए

(i) $a \vee b = a \vee c$ and (तथा) $a \wedge b = a \wedge c \Rightarrow b = c$

(ii) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

- (b) Determine the number of integers between 1 and 1000 that are not divisible by 2, 3, 5 and 7.

1 तथा 1000 के मध्य पूर्णाकों 2, 3, 5 तथा 7 से विभाजित नहीं होने वाले पूर्णाकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

OR/अथवा

- (a) Verify the following identities of Boolean algebra:

बूलिय बीजगणितीय की निम्न सर्वसमिकाओं को सत्यापित कीजिए:

(i) $(a + b)(b + c)(c + a) = ab + bc + ca$

(ii) $abc + abc' + ab'c + a'bc = ab + bc + ca$

- (b) Discuss the validity of the following argument using the method of logical inferences:

"If the industrial activities are at height, then there is no inflation. If there is no inflation, then the prices are in control. Since the prices are in control, therefore the industrial activities are at height."

तार्किक अनुमानों की निगमन विधि द्वारा निम्नलिखित तर्क की वैधता का परीक्षण कीजिए:

"यदि उद्योग धन्धे शिखर पर हैं, तब कोई मुद्रास्फीति नहीं है। यदि कोई मुद्रास्फीति नहीं है, तब महंगाई नियन्त्रण में है। चूँकि महंगाई नियन्त्रण में है, इसलिए उद्योग धन्धे शिखर पर हैं।"

Unit-2 / इकाई-2

7. (a) Determine the generating function of the numeric function $a_r = (r + 3)(r + 2)(r + 1)$; $r \geq 0$.

संख्यांक फलन $a_r = (r + 3)(r + 2)(r + 1)$; $r \geq 0$ का जनक फलन ज्ञात कीजिए।

- (b) Find the complete solution of the following recurrence relation:

निम्नलिखित पुनरावृत्ति सम्बन्ध का पूर्ण हल ज्ञात कीजिए :

$$a_r + 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 6r^2 - 6r + 1; r \geq 2.$$

OR / अथवा

- (a) Prove that the number of vertices in a self complementary graph G is of the form $4m$ or $4m + 1$, where m is a positive integer.

सिद्ध कीजिए कि स्वयं पूरक ग्राफ G में शीर्षों की संख्या $4m$ अथवा $4m + 1$ के रूप में होती है, जहाँ m एक धनात्मक पूर्णांक है।

- (b) If G is a simple graph with n vertices and having k connected components, then prove that G has at most $\frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1)$ edges.

यदि n शीर्षों पर किसी सरल ग्राफ G में k सम्बद्ध घटक हैं, तब सिद्ध कीजिए कि G में अधिक से अधिक $\frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1)$ कोरें होती हैं।

Unit-3 / इकाई-3

8. (a) If G is a simple planar graph, then prove that there is always a vertex v in G , such that $\deg(v) \leq 5$.

यदि G एक सरल समतलीय ग्राफ है, तब सिद्ध कीजिए कि G में कम से कम एक शीर्ष v सदैव इस प्रकार है कि $\deg(v) \leq 5$.

- (b) Draw the directed graph corresponding to the following incidence matrix:

निम्नलिखित आपतन आव्यूह के संगत दिष्ट ग्राफ की रचना कीजिए:

$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5 \\
 v_6 \\
 v_7
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \\
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

OR/अथवा

- (a) Let a tree T has n_1 vertices of degree 1, n_2 vertices of degree 2, , n_k vertices of degree k .

Prove that -

$$n_1 = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \dots + (k-2)n_k + 2.$$

माना किसी वृक्ष T में n_1 शीर्षों की कोटि 1, n_2 शीर्षों की कोटि 2, , n_k शीर्षों की कोटि k है।

सिद्ध कीजिए कि -

$$n_1 = n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \dots + (k-2)n_k + 2.$$

- (b) Prove that a undirected graph G is connected if and only if G has a spanning tree.

सिद्ध कीजिए कि अदिष्ट ग्राफ G एक सम्बद्ध ग्राफ होता है यदि और केवल यदि G का एक जनक

वृक्ष है।

Unit-4 / इकाई-4

9. (a) Solve the following l.p.p. by simplex method:

निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को सिम्पलेक्स विधि द्वारा हल कीजिए:

Max. (अधिकतम) $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$

s.t. (प्रतिबंध) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- (b) Find the optimal solution to the following transportation problem:

निम्नलिखित परिवहन समस्या का इष्टतम हल ज्ञात कीजिए।

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	8	10	7	6	50
O_2	12	9	4	7	40
O_3	9	11	10	8	30
b_j	25	32	40	23	

(a) Solve the following l.p.p. using duality:

द्वैती विधि निम्न रै. प्रो. समस्या को हल कीजिए:

Min. (निम्नतम कीजिए) $z = 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4$

s.t. (प्रतिबंध) $3x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 \geq -2$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 \geq -1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(b) Solve the assignment problem for maximum profit:

अधिकतम लाभ हेतु निम्न नियतन समस्या को हल कीजिए

	I	II	III	IV
A	42	35	28	21
B	30	25	20	15
C	30	25	20	15
D	24	20	16	12