B.A / B.Sc. (Pt. III) **302948**

3125/3175-A-I

B.A./B.Sc. (Part-III) EXAMINATION, 2021

(Common The faculties of Arts and Science)

(Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-III)

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-I

(Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 40 For Science
53 For Arts
50 For Old Selection Science

No supplementary answer book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answers precisely in the main answer book only.

All the parts of one question should be answerd at one place in the answer book. One complete question should not be answerd at different places in the answer book.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जाएगी। अत: परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

किसी भी प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में अलग अलग स्थानों पर हल करने बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

Write your roll number on question paper before start writing answer of questions

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

Attempt **FIVE** questions in all, selecting atleast one question from each unit.

प्रत्येक इकाई में से कम से कम एक प्रश्न का चयन करते हुए कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Unit-I / इकाई-I

1. (a) Let G be a group and $a^2=e$; $\forall a\in G$. Then show that G is an abelian group. (1, 1.6)

माना G एक समूह है और $a^2=e$; $\forall a\in G$ तब सिद्ध कीजिए कि G एक आबेली समूह है।

(b) Define the cyclic group. Prove that every cyclic group is abelian but the converse is not always true. (3, 4)

चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक चक्रीय समूह आबेली होता है, परन्तु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता है।

(c) Prove that the necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a finite group G to be a subgroup is that $a, b \in h \Rightarrow ab \in H$. (4, 5)

सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित समूह G का कोई अरिक्त समुच्चय H एक उपसमूह होगा यदि और केवल यदि $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$.

2. (a) Prove that the order of any integral power of an element of a group can never exceed the order of the element. (2.6, 3.5)

सिद्ध कीजिए कि समूह के किसी अवयव के पूर्णांक घात की कोटि अवयव की कोटि से अधिक नहीं होती है।

(b) Prove that the set An of all even permutations of degree n is a group of order $\frac{\lfloor n}{2}$. (2.7, 3.5)

सिद्ध कीजिए कि n कोटि के सभी सम क्रमचयों का समुच्चय A_n एक समूह है जिसका समूहांक $\frac{\lfloor n}{2}$ है।

(c) Prove that the order of every element of finite group is a divisor of the order of the group. (2.7, 3.5)

सिद्ध कीजिए कि परिमित समूह के प्रत्येक अवयव की कोटि समूह की कोटि की भाजक होती है।

Unit-II / इकाई-II

3. (a) If f is a homomorphism of a group G to a group G' with kemel K, then prove that K is a subgroup of G. https://www.uoronline.com (2.6, 3.5)

यदि f समूह G से G' पर एक समाकारिता के साथ केमल है, तो सिद्ध कीजिए कि f की अष्टि K समूह G का उपसमूह है।

(b) State and prove Cayley's theorem. (2.7, 3.6)

कैले प्रमेय का कथन करते हुए सिद्ध कीजिए।

(c) Let Pn be the symmetric group on n symbols. Then prove that A_n, the group of even permutations is a normal subgroup of Pn. (2.7, 3.5)

माना Pn, n संकेतों पर सममित समूह है, तो सिद्ध कीजिए कि सम क्रमचयों का समूह An, Pn का विशिष्ट उपसमूह है।

4. (a) If f is a homomorphism of a group G onto a group G' and if the order of $a \in G$ is finite, then prove that O(f(a)) divides O(a). (2.6, 3.5)

यदि समूह G से G' पर एक समाकारिता है और यदि $a \in G$ की कोटि परिमित है, तब सिद्ध कीजिए कि f(a) की कोटि a की कोटि का भाजक है।

(b) Let H is the only subgroup of finite order n in the finite group G. Prove that H is s normal subgroup. (2.7, 3.5)

माना कि परिमित समूह G का केवल H ही n परिमित कोटि का उपसमूह है। सिद्ध कीजिए कि H एक विशिष्ट उपसमूह है।

(c) State and prove fundamental theorem on Homomorphism. (2.7, 3.6)

समाकारिता की मूलभूत प्रमेय का कथन करते हुए सिद्ध कीजिए।

Unit-III / इकाई-III

5. (a) Prove that the ring (Zp, +p, °p) is an integral domain if and only if p is prime. (4, 5.3)

सिद्ध कीजिए कि वलय (Zp, +p, °p) एक पूर्णांकीय प्रान्त है यदि और केवल यदि p अभाज्य हो।

(b) Let R be a ring. Show that $S=\{x \in R : xy= yx; \forall y \in R\}$ is a subring of R. (4, 5.3)

माना कि R एक वलय है। सिद्ध कीजिए $S=\{x \in R : xy= yx; \forall y \in R\}$ वलय R का उपवलय है।

6. (a) Prove that every finite integral domain is a field. (4, 5.3)

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।

(b) Prove that the mapping $\phi : \mathbb{C} \to M_2$ difined by $\phi(a+ib) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ is an isomorphism of the ring $(\mathbb{C}, +, .°)$ in to a ring $(M_2 +, .°)$ (4, 5.3)

सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $\phi : \mathbb{C} \to M_2$, जो $\phi(a+ib) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ द्वारा परिभाषित है, तब ϕ वलय $(\mathbb{C}, + ;.)$ से वलय पर $(M_2 + ;.)$ तुल्यता है।

Unit-IV / इकाई-IV

7. (a) Prove that a commutative ring with unity is a field if it has no proper ideal. (4, 5.3)

सिद्ध कीजिए कि एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय एक क्षेत्र होता है यदि इसकी उचित गुणजावली ना हो।

(b) Prove that an ideal of a commutative ring R with unity is maximal I and only if the quotient ring R/I is a field. (4, 5.3)

सिद्ध कीजिए कि तत्समकी क्रमविनिमेय वलय R की कोई गुणजावली I एक उच्चिष्ठ गुणजावली है यदि और केवल यदि विभाग वलय R/I एक क्षेत्र है।

8. (a) Prove that every ideal I in the ring Z of integers is a principal ideal. (4, 5.3)

सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों का वलय (z +,.) एक मुख्य गुणजावली है।

(b) Prove that the union of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space V is a subspace if and only if either $W_1 = \subseteq W_2$ or $W_2 \subseteq W_1$.

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V की दो उपसमष्टियों W_1 तथा W_2 का संघ एक उपसमष्टि होता है यदि और केवल यदि $W_1 \subseteq W_2$ या $W_2 \subseteq W_1$.

Unit-V / इकाई-V

9. (a) Prove that the linear span L(S) of subset S of a vector space V(F) is the smallest subspace of V(F) containing S. (4, 5.3)

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V(F) के उपसमुच्चय S की एक घात विस्तृति L(S), S को अन्तर्विष्ट करने वाला V की न्यूनतम उपसमष्टि है।

(b) Prove that every finite dimensional vector space has a basis. (4, 5.3)

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित विमा वाले सदिश समष्टि का एक आधार होता है।

10. (a) Let V(F) is a vector space and $S=\{v_1, v_2 -, v_n\}$ is a subset of same non zero vectors of V. Then prove that S is linearly dependent if and only if some of elements of S can be expressed as a linear combination of the others. (4, 5.3)

यदि V(F) एक सदिश समष्टि है तथा $S=\{v_1, v_2 -, v_n\}$ परिमित शून्येत्तर सदिशों का एक उपसमुच्चय है, तो सिद्ध कीजिए कि S एक घातत: परतंत्र है यदि और केवल यदि S के कुछ अवयवों को शेष बचे अवयवों के एक घात संचय में व्यक्त किया जा सके।

(b) If S and T are finite dimensional subspace of a vector space. Then prove that

$$\dim (S) + \dim (T) = \dim (S+T) + \dim (S \cap T)$$

यदि S एवं T किसी सदिश समष्टि V की परिमित विमीय उपसमष्टियाँ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\text{विमा } (S) + \text{विमा } (T) = \text{विमा } (S+T) + \text{विमा } (S \cap T)$$

****