B.A / B.Sc. (Pt. III)

3125/3175-A-II
B.A./B.Sc. (Part-III) EXAMINATION, 2021

(Common The faculties of Arts and Science)
(Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-III)
(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-II
(COMPLEX ANALYSIS

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 40 For Science
53 For Arts

No supplementary answer book will be given to any candidate. Hence the candidates should write their answers precisely in the main answer book only.

All the parts of one question should be answerd at one place in the answer book. One complete question should not be answerd at different places in the answer book.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जाएगी। अत: परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

किसी भी प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर उत्तर-पुस्तिका में अलग अलग स्थानों पर हल करने बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

Write your roll number on question paper before start writing answer of questions

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

Attempt **FIVE** questions in all, selecting atleast one question from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई में से कम से कम एक प्रश्न का चयन करते हुए कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Unit-I / इकाई-I

1. (a) Prove that a stereographic projection projects circles into circles or straight lines.

   सिद्ध कीजिए कि एक त्रिविम प्रक्षेप, वृत्तों को वृत्तों में या सरल रेखा में प्रक्षेप करता है।

   (b) Define the compact set. State Jordan curve theorem and give an example that satisfy it.

संहत समुच्चय को परिभाषित कीजिए। जोरदां वक्र प्रमेय का कथन दीजिए और इसे संतुष्ट करने का एक उदाहरण दीजिए।

2. (a) Find polar form of cauchy – Rieman Equations.

कोशी-रीमान समीकरणों का ध्रुवी रूप ज्ञात कीजिए।

(b) Show that the function $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ is harmonic and find its harmonic conjugate.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ प्रसंवादी फलन है तथा इसका प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

Unit-II / इकाई-II

3. (a) State and prove the Fundamental theorem of Integral Calculus for complex functions.

सम्मिश्र फलनों के लिए समाकलन का मूल प्रमेय का प्रकथन दीजिए और इसे सिद्ध कीजिए।

(b) Find the value of : $\int_{|z|=1} \frac{\text{Sin}^6 z}{[z-(\pi/6)]^3} dz$

मान ज्ञात कीजिए : $\int_{|z|=1} \frac{\text{Sin}^6 z}{[z-(\pi/6)]^3} dz$

4. (a) State and prove Liouville's Theorem.

ल्यूवेल प्रमेय का प्रकथन दीजिए और इसे सिद्ध कीजिए।

(b) Using the definition of an integral as the limit of a sum evaluate the following integral :

(i) $\int_c dz$, (ii) $\int_c |dz|$, (iii) $\int_c z dz$ where c is any rectifiable arc joining the points a and b

योग की सीमा के रूप में समाकल की परिभाषा से निम्न समाकलों का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int_c dz$, (ii) $\int_c |dz|$, (iii) $\int_c z dz$

जहाँ c बिन्दुओं a तथा b को मिलाने वाला कोई चापकलनीय चाप है।

Unit-III / इकाई-III

5. (a) State and prove Abel's Theorem

आबल प्रमेय का प्रकथन दीजिए और इसे सिद्ध कीजिए।

(b) Find the radii of convergence of the following power series :

(i) $\sum \frac{n\sqrt{2}+i}{1+2in} z^n$, (ii) $\sum \frac{z^n}{n!}$

निम्न घात श्रेणियों के अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए :

(i) $\sum \frac{n\sqrt{2}+i}{1+2in} z^n$, (ii) $\sum \frac{z^n}{n!}$

6. (a) Suppose that we have obtained in any manner or as the definition of f(z) the formula f(z) =

Then prove that the series is necessarily identical with the Laurent's Series for

$f(z)= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n, (Rz < |z-z_0| < R_1)$.

Then prove that the series in necessarily indentical with the Laurent's series for f(z).

माना कि किसी भी प्रकार से या फलन की परिभाषा से f(z) का सूत्र है $f(z)= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n, (Rz < |z-z_0| < R_1)$. है तो सिद्ध कीजिए कि यह श्रेणी आवश्यक रूप से f(z) के लौराँ श्रेणी के तुल्य होगी।

(b) Represent the function $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$ by a series of negative powers of (z–1) which converges to f(z) when $0<|z-1|<2$.

फलन $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$ को (z–1) की ऋणात्मक घातों के रूप में व्यक्त कीजिए जो कि f(z) को अभिसृत होता है जहाँ $0<|z-1|<2$.

Unit-IV / इकाई-IV

7. (a) Find out the zeros and discuss the nature of singularities of the function :

$f(z) = \frac{z-2}{z^2}\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$

फलन $f(z) = \frac{z-2}{z^2}\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$ के शून्य ज्ञात कीजिए एवम फलन की विचित्रताओं की प्रकृति का विवेचन कीजिए।

(b) Find the residue of $\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ at all its poles in the finite plane.

समिश्र तल के परिमित भाग में $\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ के समस्त अनन्तकों पर अवशेष ज्ञात कीजिए।

8. (a) Define the entire function and prove that an entire function f(z) whose singularity at infinity is at the most, a pole is necessarily a polynomial.

सर्वत्र फलन की परिभाषा दीजिए और सिद्ध कीजिए कि सर्वत्र फलन f(z) जिसकी अनन्त पर विचित्रता अनन्तक ही सीमित है, अनिवार्यत: एक बहुपद है।

(b) Use Rouche's theorem to show that the equation $z^5 + 15z + 1 = 0$ has one root in the disk $|z| < \frac{3}{2}$ and four roots in the annulus $\frac{3}{2} < |z| < 2$.

रूशे प्रमेय के द्वारा सिद्ध कीजिए कि समीकरण $z^6 + 15z + 1 = 0$ का एक मूल तो डिस्क $|z| < \frac{3}{2}$ में है तथा चार मूल वलयिका $\frac{3}{2} < |z| < 2$ में है।

Unit-V / इकाई-V

9. (a) Prove that the bilinear transformation transform any two points which are inverse with respect to a circle in z–plane into two points which are inverse points with respect to the transformed circle in the w-plane.

सिद्ध कीजिए कि द्विरैखिक रूपान्तरण द्वारा z – समतल में एक वृत्त के सापेक्ष दो प्रतिलोम बिन्दुओं का रूपान्तरण w– समतल में दो बिन्दु हैं जो कि रूपान्तरित वृत्त के सापेक्ष प्रतिलोम बिन्दु हैं।

(b) Find a bilinear transormation that maps the points $z = 2, i, -2$ into $w = 1, i, -1$ respectively.

एक द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z = 2, i, -2$ को क्रमश: $w = 1, i, -1$ में प्रतिचित्रित कीजिए।

10. (a) Evaluate : $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$

मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$

(b) Show that the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^{n+1}}$ and $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$, $z>0$ are analytic continuation of each other.

प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणियाँ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^{n+1}}$ तथा $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$, $z>0$ एक दूसरे का विश्लेषिक सांतव्य है।

****