

B.A./B.Sc. (Part-I)

1125/1175-I

B.A./B.Sc. (Part-I) EXAMINATION, 2023

105675

(Common for the Faculties of Arts and Science)

[Also common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-I]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-I

(Discrete Mathematics)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : { 40 for Science 53 for Arts
अधिकतम अंक : { विज्ञान के लिए 40, तथा कला के लिए 53

समय : 3 घंटे

(i) Attempt five questions in all, selecting one question from each Unit.

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ii) Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न -पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) If A and B are any two sets, then prove that :

4/5½

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

यदि A तथा B कोई दो समुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिये कि :

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(b) Prove by the principle of Mathematical induction that $3^{2n+2} - 8n - 9$, is divisible by 64, if n is a positive integer.

4/5½

गणितीय आगमन सिद्धान्त से प्रदर्शित कीजिये कि $3^{2n+2} - 8n - 9$, 64 से विभाज्य है यदि n धन पूर्णांक है।

2. (a) Let $R^* = \{(a, b) : 1 + ab > 0 ; a, b \in \mathbb{R}\}$ be a relation on the set R of real numbers. Then explain whether R^* is reflexive, symmetric or transitive.

4/5½

माना वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित कोई सम्बन्ध $R^* = \{(a, b) : 1 + ab > 0 ; a, b \in \mathbb{R}\}$ है तो बताइए कि R^* , स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रामक है या नहीं।

(b) State Pigeonhole principle. Assuming a patient is given a prescription of 45 tablets with the instructions to take atleast one tablet per day for 30 days. Prove that there must be a period of consecutive days during which the patient takes a total of exactly 14 tablets.

1+3/1½+4

कपोत कोष्ठ सिद्धान्त लिखिये। माना एक मरीज को 30 दिनों के लिए किसी दवा की 45 गोलियाँ, प्रतिदिन कम से कम एक गोली लेने के अनुदेश के साथ दी जाती हैं। सिद्ध कीजिए कि लगातार कुछ दिनों का एक अन्तराल ऐसा अवश्य है जिसमें मरीज यथार्थतः 14 गोलियाँ लेता है।

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) If a, b, c are any three arbitrary elements of the Boolean algebra $\langle B, +, \cdot, ' \rangle$, then prove that: $4/5\frac{1}{2}$
 $a + (b + c) = (a + b) + c$
 यदि a, b, c बूलिय बीजगणित $\langle B, +, \cdot, ' \rangle$ के तीन स्वेच्छ अवयव हैं तो सिद्ध कीजिए कि :
 $a + (b + c) = (a + b) + c$

(b) In a Boolean algebra $\langle B, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ a partial order relation \leq be defined on B 4/5
 $(a \leq b \Leftrightarrow ab' = 0; a, b \in B)$ then prove that :
 $a \cdot b =$ greatest lower bound (Infimum) $\{a, b\}$
 किसी बूलिय बीजगणित $\langle B, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ में आंशिक क्रम सम्बन्ध \leq , B पर परिभाषित है
 $(a \leq b \Leftrightarrow ab' = 0; a, b \in B)$, तब सिद्ध कीजिये :
 $a \cdot b =$ महत्तम निम्न परिबन्ध (निम्नक) $\{a, b\}$.

4. (a) Find the Conjunctive Normal Form (C.N.F) of the following Boolean function : 4/5\frac{1}{2}
 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_2') \cdot (x_1 + x_3')$
 निम्न बूलिय फलन का संयोजनीय प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिये :
 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_2') \cdot (x_1 + x_3')$

(b) Define Euler's ϕ function, and prove : 4/5
 If P is a prime number and K is an arbitrary positive integer, then $\phi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$

आयलर ϕ फलन को परिभाषित कीजिये एवं निम्न प्रमेय को सिद्ध कीजिये :

यदि P कोई अभाज्य संख्या है एवं K एक स्वेच्छ धनात्मक पूर्णांक है तब $\phi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$

UNIT - III / इकाई - III

(a) Show by means of truth table, that the compound statement $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ is a tautology. 4/5\frac{1}{2}
 सत्यमान सारणी की सहायता से प्रदर्शित कीजिये कि मिश्र कथन $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ एक पुनरुक्ति है।

(b) (i) Define rule of detachment for the validity of logical inference with example. 4/5
 तर्क संगत अनुमानों की वैधता के लिए विलगता नियम उदाहरण सहित परिभाषित कीजिये।

(ii) Define Quantifier with example.
 प्रमात्रक को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिये।

(a) Determine the numeric function corresponding to the following generating function : 4/5

$$G(x) = \frac{1 + 2x}{2 + 3x + x^2}$$

निम्नलिखित जनक फलन के संगत संख्यांक फलन ज्ञात कीजिये :

$$G(x) = \frac{1 + 2x}{2 + 3x + x^2}$$

(b) Solve the recurrence relation : 4/5\frac{1}{2}

$a_r = 3a_{r-1} - 2a_{r-2}; r \geq 2, a_1 = 5, a_2 = 3$
 by the method of generating function.

पुनरावृत्ति संबंध $a_r = 3a_{r-1} - 2a_{r-2}; r \geq 2, a_1 = 5, a_2 = 3$
 को जनक फलन की विधि से ज्ञात कीजिये।

7. (a) Define the following :

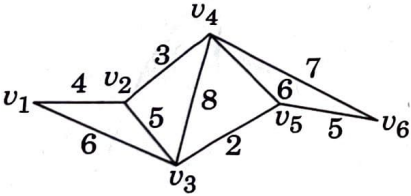
- (i) Degree of a vertex in a graph
- (ii) Pendant vertex
- (iii) Regular graph
- (iv) Bipartite graph

निम्नलिखित को परिभाषित कीजिये :

- (i) ग्राफ में किसी शीर्ष की घात या कोटि
- (ii) निलम्बी शीर्ष
- (iii) नियमित ग्राफ
- (iv) द्विखण्डी ग्राफ

(b) If G is simple connected planar graph with n vertices and e edges ($e > 2$), then prove that $e \leq 3n - 6$: 4/5
 यदि G एक सरल सम्बद्ध समतलीय ग्राफ है, जिसमें n शीर्ष तथा e कोरे ($e > 2$) हैं तब सिद्ध कीजिए कि $e \leq 3n - 6$:

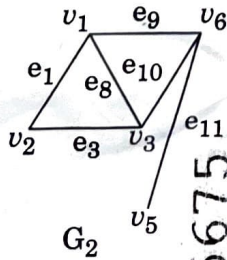
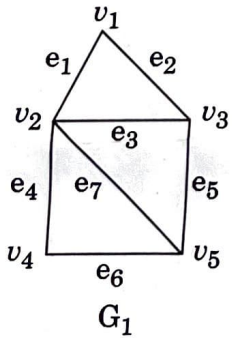
8. (a) Find the shortest path and distance between the vertices V_1 and V_6 in the following weighted graph. 4/5½



निम्न भारित ग्राफ में शीर्षों V_1 तथा V_6 के मध्य लघुतम मार्ग तथा मार्ग दूरी ज्ञात कीजिये।

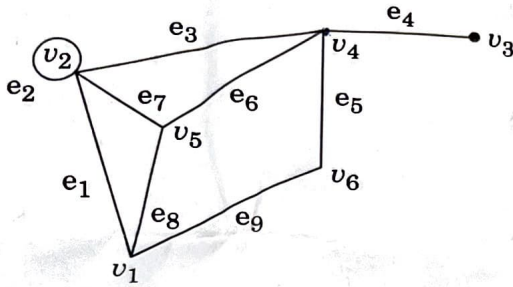
(b) Find the union of graphs G_1 and G_2 shown in figure : 4/5

चित्र में दिये गये ग्राफ G_1 तथा G_2 का संघ ज्ञात कीजिये :



9. (a) Find the adjacency matrix of the following graph :
निम्न ग्राफ का आसन्नता आव्यूह ज्ञात कीजिये :

4/5½



- (b) Define Tree. prove that a tree with n vertices has exactly $(n - 1)$ edges.
वृक्ष को परिभाषित कीजिये। सिद्ध कीजिये कि n शीर्षों वाले वृक्ष में यथार्थतः $(n - 1)$ कोरें होती हैं।

4/5

10. (a) Prove that every tree has either one or two centres.
सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक वृक्ष का एक अथवा दो केन्द्र होते हैं।

4/5½

- (b) Determine whether the graphs given below are Euler, Hamiltonian or not.
बताइये कि निम्न ग्राफ आयलर, हैमिल्टोनियन है अथवा नहीं :

4/5



Fig.1

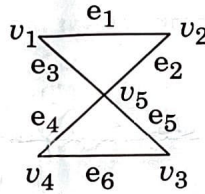


Fig. 2

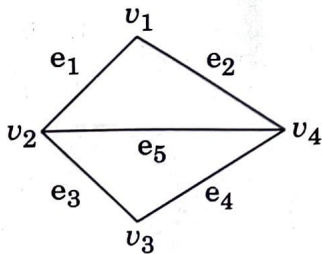


Fig.3

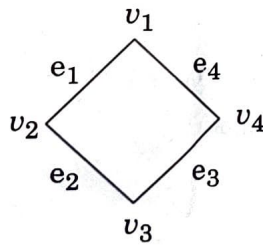


Fig. 4

- o O o -