

3125/3175-A-II

B.A./B.Sc. (Part-III) EXAMINATION - 2022

(Common for the Faculties of Arts and Science)

(Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-III)

(Three -Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-II
(COMPLEX ANALYSIS)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 40 For Science

53 For Arts

(i). *No supplementary Answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write their answers precisely in the main answer-book only.*

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जाएगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

(ii). *All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.*

किसी भी प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाए एक ही स्थान पर हल करें।

(iii). *Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.*

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

(iv). *Attempt five questions in all, selecting atleast one question from each unit. All questions carry equal marks.*

प्रत्येक इकाई में से कम से कम एक प्रश्न का चयन करते हुए कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) Define the followings :

(i) Compact set

(ii) Connected set

निम्न को परिभाषित कीजिए :

(i) संहत समुच्चय

(ii) सम्बद्ध समुच्चय

(b) Every closed and bounded set is compact.

प्रत्येक संवृत तथा परिबद्ध समुच्चय संहत होता है।

2. (a) Show that the function $f(z) = |z|^2$ is continuous everywhere but its derivative exists only at the origin.

प्रदर्शित करो कि फलन $f(z) = |z|^2$ सभी जगह संतत है परन्तु उसका अवकलन केवल मूल बिन्दु पर विद्यमान है।

- (b) State and prove the necessary condition for $f(z)$ to be analytic.

प्रकथन देते हुए फलन $f(z)$ के विश्लेषिक होने का आवश्यक प्रतिबन्ध को सिद्ध कीजिये।

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) Prove that if $f(z)$ is analytic, with a continuous derivative, in a simply connected domain D and

$$C \text{ is a closed contour lying in } D \text{ then } \int_C f(z) dz = 0$$

सिद्ध कीजिये कि यदि क्रमशः सम्बद्ध क्षेत्र D में फलन $f(z)$ विश्लेषिक है एवं उसके अवकलन संतत है, तो D में निहित

$$\text{किसी संवृत कन्टूर } C \text{ के लिये } \int_C f(z) dz = 0$$

- (b) Verify Cauchy's theorem for the function $5 \sin 2z$ if γ is the square with vertices at $1 \pm i, -1 \pm i$.

फलन $5 \sin 2z$ के लिये वक्र पथ γ जो शीर्षों $1 \pm i$ एवं $-1 \pm i$ वाला वर्ग है, के अनुदिश समाकलन कर कोशी प्रमेय का सत्यापन कीजिये।

4. (a) Prove that if a function $f(z)$ is analytic within a closed contour C then its derivative at any point z_0 within C is given by :

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

सिद्ध कीजिये कि यदि किसी बन्द परिपथ (संवृत कन्टूर) C में फलन $f(z)$ विश्लेषिक है तो, C के किसी बिन्दु z_0 पर उसका अवकलन निम्न है :

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

- (b) Prove that if $f(z)$ be a continuous function in a simply connected domain D if $\int_C f(z) dz = 0$

along every simply closed contour C in D then $f(z)$ is analytic in D .

सिद्ध कीजिये कि यदि $f(z)$ क्रमशः सम्बद्ध प्रदेश D में सतत है एवं D के प्रत्येक परिपथ C के अनुदिश $\int_C f(z) dz = 0$

है तो D में $f(z)$ विश्लेषिक होगा।

5. (a) State and Prove Taylor's Theorem.

टेलर प्रमेय का प्रकथन देते हुए इसे सिद्ध कीजिये।

- (b) Find the expansion for $f(z) = \frac{z^2 - 4}{(z+1)(z+4)}$, which are valid for the regions.

(i) $1 < |z| < 4$ (ii) $|z| > 4$

निम्न क्षेत्रों के लिये $f(z) = \frac{z^2 - 4}{(z+1)(z+4)}$ का मान्य प्रसार कीजिये।

(i) $1 < |z| < 4$ (ii) $|z| > 4$

6. (a) State and Prove Cauchy-Hadamard Theorem.

कोशी हाडमार्ड प्रमेय का प्रकथन दीजिये एवं सिद्ध कीजिये।

- (b) Find the radii of convergence of the following :

Power series (i) $\sum \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} z^n$ (ii) $\sum \frac{z^n}{2^n + 1}$

निम्न ज्ञात श्रेणियों की अभिसरण क्रिया ज्ञात कीजिये।

(i) $\sum \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} z^n$ (ii) $\sum \frac{z^n}{2^n + 1}$

7. (a) If $f(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1}$, then show that $f(z)$ has a double pole.

फलन $f(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1}$ के लिये दर्शाइये कि फलन के दो अनन्तक हैं।

- (b) Discuss the singularity of function $f(z) = \frac{e^{c/(z-a)}}{e^{z/a} - 1}$

फलन $f(z) = \frac{e^{c/(z-a)}}{e^{z/a} - 1}$ की विचित्रता की विवेचना कीजिये।

8. (a) Find the residue of $\frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2 + 4)}$ at all its poles in the finite plane.

परिमित तल में $\frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2 + 4)}$ के सभी अनन्तकी पर अवशेष ज्ञात कीजिये।

- (b) State and Prove fundamental Theorem of Algebra.

बीजगणित की मूल प्रमेय का प्रकथन दीजिये एवं सिद्ध कीजिये।

9. (a) Find the bilinear transformation which maps the point $z = \infty, i, 0$ into the points $w = 0, i, \infty$ respectively.

एक द्विरेखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दुओं $z = \infty, i, 0$ को क्रमशः $w = 0, i, \infty$ में प्रतिचित्रण करें।

- (b) If $w = f(z)$ is a conformal mapping of a domain D in z -plane into a Domain D' of the w -plane then prove that $f(z)$ is an analytic function of z in D .

यदि $w = f(z)$, z -तल के प्रान्त D से w -तल के प्रान्त D' में अनुकीण प्रति चित्रण हो, तो सिद्ध करो कि $f(z)$ प्रान्त D में z का विश्लेषिक फलन है।

10. (a) Prove that $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{a^2 + m^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}, (m \geq 0)$

सिद्ध कीजिये कि $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{a^2 + m^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}, (m \geq 0)$

- (b) The Power series $z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots$ and $\pi i - (z-2) + \frac{1}{2}(z-2)^2 + \dots$ has no common region of convergence. Prove that they are still analytic continuation of the same function.

घात श्रेणियाँ $z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots$ तथा $\pi i - (z-2) + \frac{1}{2}(z-2)^2 + \dots$ का कोई सर्वनिष्ठ अभिसरण अंग नहीं है तो भी सिद्ध कीजिये की दोनों श्रेणियाँ एक ही फलन को विश्लेषिक सांतत्य है।

- o o o -