3125/3175-A-III

B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2024

(Common for the Faculties of Arts & Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-III]

(Three Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-III

(Mechanics)

7079369

Time Allowed: Three Hours

समय: 3 घंटे

Maximum Marks: 40 for Science, 54 for Arts & 32 Old Scheme

अधिकतम अंक: विज्ञान के लिए 40, कला के लिए 54 तथा ओल्ड स्किम के लिए 32

No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answers precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर–पुस्तिका नहीं दी जाएगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर–पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर–पुस्तिका में अलग–अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

*Attempt **five** questions in all, selecting **one** question from each unit.*

*प्रत्येक इकाई में से कम से कम **एक** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न–पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

UNIT-I / इकाई–I

(a) An insect crawls at a constant rate u along the spoke of a cart wheel of radius a. The cart is moving with velocity v. Find the acceleration along and perpendicular to the spoke of insect at time t.
एक कीड़ा किसी गाड़ी के a त्रिज्या वाले पहिये के आरे पर अचर चाल u से रेंगता है और गाड़ी v वेग से चलती है। t समय पर आरे की दिशा में तथा उसके लम्बवत् दिशा में कीड़े का त्वरण ज्ञात कीजिए।

(b) A particle moves in a curve so that its tangential and normal accelerations are equal and the angular velocities of the tangent is constant. Find the path.
एक कण एक वक्र में इस प्रकार चलता है कि इसके स्पर्श रेखीय तथा अभिलाम्बिक त्वरण सदा समान रहते हैं और इसकी स्पर्श रेखा का कोणीय वेग अचर रहता है। पथ ज्ञात कीजिए।

(a) A particle is performing S.H.M. of period T about a centre O and it passes through a point P (where OP=b) with a velocity v in the direction OP. Prove that the time which elapses before it returns to P is $\frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{vT}{2\pi b}\right)$
एक कण केन्द्र O के सापेक्ष T आर्वतकाल की सरल आवर्त गति करें और यह किसी बिन्दु P (जहाँ OP=b) OP की दिशा में v वेग से गुजरे, तो सिद्ध करो कि वह P पर पुनः $\frac{T}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{vT}{2\pi b}\right)$ समय के पश्चात् लौटेगा।

(b) A mass m hangs from a fixed point by a light string and is given a small vertical displacement, prove that the motion is S.H.M. If l is the length of the string in equilibrium position and n the number of oscillations per second. Show that the natural length of the string is $l - \frac{g}{4\pi^2 n^2}$

m द्रव्यमान का एक कण एक हल्की डोरी द्वारा एक निश्चित बिन्दु से लटका हुआ है तथा इसे लघु उर्ध्वाधर विस्थापन दिया गया है। सिद्ध कीजिए कि कण की गति सरल आवर्त गति होगी। यदि सन्तुलन की दशा में डोरी की लम्बाई l है तथा दोलन आवृत्ति n प्रति सैकण्ड है, तो सिद्ध कीजिए कि डोरी की स्वाभाविक लम्बाई होगी $l - \frac{g}{4\pi^2 n^2}$

7079369

UNIT-II / इकाई–II

3. (a) A particle is projected with velocity u along a smooth horizontal plane in a medium whose resistance per unit mass k times the velocity. Show that the velocity v after a time t and the distance s in that time are given by -

$v = ue^{-kt}$, $s = \frac{u}{k}(1 - e^{-kt})$

एक कण को चिकने क्षैतिज तल पर ऐसे माध्यम में u वेग से फेंका जाता है जिसका प्रतिरोध प्रति इकाई संहति के लिए वेग का k गुणा है। प्रदर्शित कीजिए कि t समय पश्चात् यदि इसका वेग v तथा इसके द्वारा s दूरी तय की गई हो, तो –

$v = ue^{-kt}$, $s = \frac{u}{k}(1 - e^{-kt})$

7079369

(b) A spider hangs from the ceiling by a thread of modulus of elasticity equal to its weight. Show that it can climb to the ceiling with an expenditure of work equal to only three quarters of what would be required, if the thread were inelastic.

एक मकड़ी कमरे की छत से एक ऐसे धागे से लटकती है, जिसका प्रत्यास्थ मापांक उसके भार के बराबर है। सिद्ध करो कि वह उस कार्य का $\frac{3}{4}$ भाग करके छत तक चढ़ जाती है जो उस धागे के अप्रत्यास्थ होने पर करना पड़ता है।

4. (a) If v_1, v_2 be the velocities at the ends of the focal chord of a projectile's path and u be the velocity at the vertex of the path (or u be the horizontal component of velocity), Show that $\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} = \frac{1}{u^2}$.

यदि किसी प्रक्षेप्य के वेग उसके पथ की नाभि जीवा के सिरों पर v_1 तथा v_2 हो और यदि पथ के शीर्ष पर वेग u (या उसका क्षैतिज वेग u) हो, तो सिद्ध करो कि $\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} = \frac{1}{u^2}$

7079369

(b) A heavy particle of weight W, attached to a fixed point by a light inextensible string, describes a circle in a vertical plane. The tension of the string has the values mW and nW respectively, when the particle is at the highest and the lowest point of its path. Show that n = m+6.

एक W भार वाला कण जो कि स्थिर बिन्दु से एक भारहीन अवितान्य डोरी से बंधा है और एक उर्ध्वाधर तल में एक वृत्त में घूम रहा है। जब कण अधिकतम तथा न्यूनतम ऊँचाई पर होता है, तो डोरी में खिंचाव क्रमशः mW तथा nW होता है, तो सिद्ध कीजिए कि n = m+6.

UNIT-III / इकाई–III

5. (a) A particle moves with a central acceleration which varies inversely as the cube of the distance; if it be projected from an apse at a distance a from the origin with a velocity which is $\sqrt{2}$ times velocity for a circle of radius a, show that the equation to its path is $r\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) = a$.

एक कण केन्द्रीय त्वरण, जो कि दूरी के घन का व्युत्क्रमानुपाती, सहित गतिशील है। यदि इसे मूल बिन्दु से a दूरी पर स्तब्धिका से ऐसे वेग से फेंका जाता है कि जो a त्रिज्या वाले वृत्त के लिए वेग का $\sqrt{2}$ गुणा है, तब प्रदर्शित करो कि पथ का समीकरण $r\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) = a$ है।

(b) A particle describes an ellipse under a force $\mu/(\text{distance})^2$ towards the focus; if it was projected with velocity V from a point distance r from the centre of force, show that its periodic time is ; $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left[\frac{2}{r}-\frac{V^2}{\mu}\right]^{-3/2}$.

एक कण एक बल, जो कि $\mu/(\text{दूरी})^2$ है और नाभि की ओर है, के अधीन एक दीर्घवृत्त का निर्माण करता है। यदि इसे एक बिन्दु से, जिसकी दूरी बल केन्द्र से r है, V वेग से प्रक्षिप्त किया गया हो, तो सिद्ध करो कि इसका आवर्तकाल होगा –

$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left[\frac{2}{r}-\frac{V^2}{\mu}\right]^{-3/2}$

6. (a) Find the moment of inertia of a hollow sphere about a diameter, its external and internal radii being a and b.

किसी खोखले गोले का उसके व्यास के सापेक्ष जड़त्व–आघूर्ण ज्ञात करिये, जहाँ a तथा b उसकी बाह्य तथा अन्तः त्रिज्यायें हैं।

(b) Find the moment of inertia of a circular ring of radius a and mass M about its diameter.

त्रिज्या a तथा संहति M की एकसमान वृत्तीय वलय का उसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

UNIT-IV / इकाई–IV

7. (a) In a smooth hemisphere cup is placed a heavy rod, equal in length to the radius of the cup, the centre of gravity of the rod being one-third of its length from one end. Show that the angle made by the rod with the vertical is $\tan^{-1}(3\sqrt{3})$.

किसी चिकने अर्द्धगोलीय प्याले में प्याले की त्रिज्या के बराबर लम्बाई की एक भारी छड़ रखी हुई है, छड़ का गुरुत्व केन्द्र स्वयं की लम्बाई का एक–तिहाई एक सिरे से है। सिद्ध कीजिए कि छड़ उर्ध्वाधर से $\tan^{-1}(3\sqrt{3})$ का कोण बनाती है।

(b) Forces P, Q, R act along the sides BC, CA, AB of a triangle ABC and forces P′, Q′, R′ act along OA, OB, OC where O is the centre of the circumscribing circle. Prove that if the six forces are in equilibrium -

(i) $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$ (ii) $\frac{PP'}{a}+\frac{QQ'}{b}+\frac{RR'}{c}=0$

त्रिभुज ABC की भुजायें BC, CA, AB के अनुदिश क्रमशः बल P, Q, R क्रियाशील हैं और बल P′, Q′, R′ क्रमशः OA, OB, OC के अनुदिश क्रियाशील है, जहाँ O परिवृत्त का केन्द्र है। यदि यह छः बल साम्यावस्था में है, तो सिद्ध कीजिए –

(i) $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$ (ii) $\frac{PP'}{a}+\frac{QQ'}{b}+\frac{RR'}{c}=0$

8. (a) A ladder whose C.G. divides it into two portions of length a and b, rest with one ends on a rough horizontal floor and the other end against a rough vertical wall. If the coefficient of friction at the floor and the wall be μ and μ' respectively, show that the inclination of the ladder to the floor, when equilibrium is limiting is $\tan^{-1}\left\{\frac{a-b\mu\mu'}{\mu(a+b)}\right\}$.

एक सीढ़ी का गुरुत्व केंद्र इसे दो भागों a और b में बाँटता है। सीढ़ी का एक सिरा रूक्ष क्षैतिज फर्श पर तथा दूसरा रूक्ष उर्ध्वाधर दीवार पर टिका है। यदि फर्श

तथा दीवार के घर्षण गुणांक क्रमशः μ तथा μ' हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि सीमान्त संतुलन में सीढ़ी का फर्श से झुकाव होगा – $\tan^{-1}\left\{\frac{a-b\mu\mu'}{\mu(a+b)}\right\}$

(b) Two rough particles connected by a light string rest on an inclined plane. If their weights and corresponding coefficients of friction are W_1, W_2 and μ_1, μ_2 respectively. Show that greatest inclination of the plane for equilibrium is $\tan^{-1}\left(\frac{\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2}{W_1 + W_2}\right)$.

दो खुरदरे कण जिसका भार व घर्षण गुणांक क्रमशः W_1, W_2 तथा μ_1, μ_2 है, एक भारहीन रस्सी से जुड़े हुए किसी धरातल पर साम्यावस्था में है, तो सिद्ध कीजिए कि धरातल का अधिकतम झुकाव होगा $\tan^{-1}\left(\frac{\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2}{W_1 + W_2}\right)$.

UNIT-V / इकाई–V

9. (a) Four rods are jointed to form a parallelogram, the opposite joints are jointed by strings forming the diagonals, and the whole system is placed on a smooth horizontal table. Show that their tensions are in the same ratio as their lengths.

चार छड़ों को परस्पर जोड़कर एक समान्तर चतुर्भुज बनाया गया है। विपरीत जोड़ों को डोरियों द्वारा जोड़ दिया जाता है ताकि वे समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण रहे। सम्पूर्ण निकाय को किसी चिकनी क्षैतिज मेज पर रख दिया जाता है। सिद्ध कीजिए कि उनके तनाव उसी अनुपात होते हैं जिस अनुपात में उनकी लम्बाईयाँ होती हैं।

(b) Four equal jointed rods, each of length a, are hung from an angular point, which is connected by an elastic string with the opposite point. If the rods hung in the form of a square and if the modulus of elasticity of the string be equal to the weight of a rod, show that the unstretched length of the string is $a\frac{\sqrt{2}}{3}$.

प्रत्येक लम्बाई a की चार समान जुड़ी हुई छड़ें उस कोणीय बिन्दु से लटकाई जाती हैं जो विपरीत बिन्दु से एक प्रत्यास्थ डोरी द्वारा जुड़ा हुआ है। यदि छड़ें वर्ग के रूप में लटकें और यदि डोरी का प्रत्यास्था गुणांक एक छड़ के भार के तुल्य है, तो सिद्ध कीजिए कि डोरी की बिना तनी हुई लम्बाई $a\frac{\sqrt{2}}{3}$ है।

10. (a) Show that the length of an endless chain which will hang over a circular pulley of radius a so as to be in contact with two thirds of the circumference of the pulley is $a\left[\frac{4\pi}{3} + \frac{3}{\log(2+\sqrt{3})}\right]$.

प्रदर्शित कीजिए कि एक अन्तहीन जंजीर जो त्रिज्या a की एक वृत्ताकार घिरनी के $\frac{2}{3}$ परिधि से सम्पर्क में है, तो उसकी लम्बाई होगी $a\left[\frac{4\pi}{3} + \frac{3}{\log(2+\sqrt{3})}\right]$.

(b) A uniform string of weight W is suspended from two points at the same level and a weight W′ is attached to its lowest point. If α and β be now the inclinations to the horizontal of the tangents at the highest and the lowest points. Prove that $\frac{\tan\pi}{\tan\beta} = 1 + \frac{W}{W'}$.

W भार की एक समान रस्सी समान स्तर के दो बिन्दुओं के मध्य लटकी हुई है, जिसके निम्नतम बिन्दु पर एक भार W′ लगा रखा है। यदि उच्च एवं निम्न बिन्दु पर स्पर्श रेखाएँ क्षैतिज से झुकाव कोण α तथा β हो, तो सिद्ध कीजिए कि –

$\frac{\tan\pi}{\tan\beta} = 1 + \frac{W}{W'}$