This question paper contains 4 printed pages.

Roll No. ....S31448....

3125/3175-A-II

B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2024

(Common for the Faculties of Arts & Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-III]

(Three year scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-II

(Complex Analysis)

6930112

Time Allowed: Three Hours
समय: 3 घंटे

Maximum Marks: 40 for Science 53 for Arts
अधिकतम अंक: विज्ञान के लिए 40 तथा कला के लिए 53

No Supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write their answers precisely in the main answer-book only.
किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर–पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर–पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.
किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर–पुस्तिका में अलग–अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.
प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न–पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

*Attempt any **five** questions in all, selecting **one** question from each unit. **All** questions carry **equal** marks.*
*प्रत्येक इकाई में से कम से कम **एक** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। **सभी** प्रश्नों के अंक समान हैं।*

UNIT-I / इकाई–I

1. (a) Prove that $\arg z - \arg(-z) = \pm\pi$ according as $\arg z$ is positive or negative.

   सिद्ध करो कि $\arg z - \arg(-z) = \pm\pi$ जैसे $\arg z$ धनात्मक अथवा ऋणात्मक है।

   (b) Prove that the function

   $$f(z)=\begin{cases} z^2 & z \neq i \\ 0 & z=i \end{cases}$$

   is discontinuous at $z = i$.

   सिद्ध करो कि फलन

   $$f(z)=\begin{cases} z^2 & z \neq i \\ 0 & z=i \end{cases}$$

   $z = i$ पर संतत फलन नहीं है।

2. (a) Show that $f(z) = z^n$ differentiable at every point where n is an integer.

सिद्ध करो कि फलन $f(z) = z^n$ सर्वत्र अवकलनीय है। जहाँ n एक पूर्णांक है।

(b) Prove that the following function is harmonic. Also determine the harmonic conjugate and find the corresponding analytic $f(z)$ in terms of z

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन प्रसंवादी है। फलन के लिए संयुग्मी प्रसंवादी निर्धारित कीजिए तथा संगत वैश्लेषिक फलन $f(z)$ भी z के पदों में ज्ञात कीजिए।

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$$

UNIT-II / इकाई–II

3. (a) Evaluate -

$$\int_0^{1+i} z^2 dz$$

मान ज्ञात कीजिए –

$$\int_0^{1+i} z^2 dz$$

(b) Evaluate -

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

मान ज्ञात कीजिए –

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

4. (a) Let $f(z)$ be a single valued analytic function in a simple connected domain G if $a, b \in G$ then prove that -

$$\int_a^b f(z)dz = \phi(b) - \phi(a)$$

where $\phi(z)$ is an indefinite integral of $f(z)$

माना एक एकशः सम्बद्ध प्रान्त G में $f(z)$ एक एकमानी विश्लेषिक फलन है। यदि $a, b \in G$ तब सिद्ध करो कि –

$$\int_a^b f(z)dz = \phi(b) - \phi(a)$$

यहाँ $\phi(z)$, $f(z)$ का अनिश्चित समाकल है।

(b) Using the definition of an integral as the limit of a sum, evaluate the following integrals -

(i) $\int_C dz$ (ii) $\int_C |dz|$

where c is any rectifiable arc joining the points a and b.

योग की सीमा के रूप में समाकल की परिभाषा से, निम्न समाकलों का मान ज्ञात करो –

(i) $\int_C dz$ (ii) $\int_C |dz|$

जहाँ c बिन्दुओं a तथा b को मिलाने वाला कोई चापकलनीय चाप है।

UNIT-III / इकाई–III

5. (a) Expand e^z in a Taylor's series about $z = 0$ and determine the region of convergence.

फलन e^z का $z = 0$ के सामीप्य में टेलर श्रेणी में प्रसार करिए तथा श्रेणी के अभिसारी होने का क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

(b) With the help of Laurent series for $f(z)=\frac{1}{(1-z)(z-2)}$. If c be any closed contour within the annulus $1<|z|<2$ then prove that $\int_c f(z)dz = 2\pi i$

फलन $f(z)=\frac{1}{(1-z)(z-2)}$ की लॉरेंट श्रेणी की सहायता से, यदि वलयिका $1<|z|<2$ में c कोई संवृत्त कंटूर हो तो सिद्ध करो कि $\int_c f(z)dz = 2\pi i$

6. (a) Find the radius of convergence and circle of convergence of the following series.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

निम्न श्रेणी की अभिसरण त्रिज्या तथा अभिसरण वृत्त ज्ञात कीजिए।

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

(b) If the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converges for $z = z_0 \neq 0$ Then prove that $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converges absolutely for $|z| < |z_0|$ i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ converges for $|z| < |z_0|$

यदि घात श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z = z_0 \neq 0$ पर अभिसारी है। तब सिद्ध कीजिए $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < |z_0|$ के लिए निरपेक्ष अभिसारी अर्थात् $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$, $|z| < |z_0|$ के लिए अभिसारी है।

UNIT-IV / इकाई–IV

7. (a) Prove that the function $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$ has removable singularity at $z = 0$.

सिद्ध करो कि फलन $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$ की $z = 0$ पर अपनेय विचित्रता है।

(b) Prove that, a function which has no singularity in the finite part of the plane or at infinity, is constant.

सिद्ध करो कि यदि किसी फलन की, सम्मिश्र तल के परिमित अंश में या अनन्त पर, कोई विचित्रता नहीं हो तो फलन अचर है।

8. (a) Find the residue of $\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ at all its poles in the finite plane.

सम्मिश्र तल के परिमित भाग में $\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ के समस्त अनन्तकों पर अवशेष ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that every polynomial of degree $n \geq 1$ has at least one zero.

सिद्ध करो कि कोटि $n \geq 1$ के प्रत्येक बहुपद का कम से कम एक शून्य होता है।

UNIT-V / इकाई–V

9. (a) Use method of contour integration to prove that -

परिरेखा समाकलन द्वारा सिद्ध कीजिए कि –

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \frac{2\pi}{1-a^2}, \; 0 < a < 1$$

(b) Evaluate -

मान ज्ञात कीजिए –

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$$

10. (a) Under the transformation $w = z + (1-i)$, determine the corresponding region D' of the w-plane to the rectangular region D in the z-plane bounded by $x=0$, $y=0$, $x=1$ and $y=2$.

रूपान्तरण $w = z + (1-i)$ के अन्तर्गत z–समतल में $x=0$, $y=0$, $x=1$ तथा $y=2$ से परिसीमित आयतीय क्षेत्र D का w–समतल में संगत क्षेत्र D' निर्धारित कीजिए।

(b) Show that the transformation $w = \frac{2z+3}{z-4}$ maps the circle $x^2 + y^2 - 4x = 0$ into the straight line $4u + 3 = 0$ where $z = x + iy$ and $w = u + iv$.

सिद्ध कीजिए कि रूपान्तरण $w = \frac{2z+3}{z-4}$ वृत्त $x^2 + y^2 - 4x = 0$ को सरल रेखा $4u + 3 = 0$ पर प्रतिचित्रित करता है जहाँ $z = x + iy$ और $w = u + iv$.
