This question paper contains **4** printed pages. Roll No. S31443

3125/3175-A-I

B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2024

(Common for the Faculties of Arts and Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-III]

(Three year scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-I

(Algebra)

4004562

Time Allowed: Three Hours

Maximum Marks: 40 for Science, 53 for Arts, 50 for Old Selection Science

No Supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write their answers precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर–पुस्तिका नहीं दी जाएगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book

किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गये विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर–पुस्तिका में अलग–अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

Write your role number on question paper before start writing answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न–पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

Attempt ***five*** *questions in all, selecting at least* ***one*** *question from each Unit.*

प्रत्येक इकाई में से कम से कम ***एक*** *प्रश्न का चयन करते हुए कुल* ***पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

UNIT–I / इकाई– I

1. (a) Show that $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ is an abelian group for the operation '$+_5$' defined as follows -

$$a +_5 b = \begin{cases} a+b & if \quad a+b<5 \\ a+b-5 & if \quad a+b \geq 5 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ संक्रिया '$+_5$' के लिए एक क्रमविनिमेय ग्रुप है, जहाँ '$+_5$' निम्न प्रकार परिभाषित है –

$$a +_5 b = \begin{cases} a+b & \text{यदि} \quad a+b<5 \\ a+b-5 & \text{यदि} \quad a+b \geq 5 \end{cases}$$

(b) If $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Find the order of a permutation α.

यदि $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

क्रमचय α की कोटि ज्ञात करो।

2. (a) Find all the generators of the cyclic group $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \times_5)$.

चक्रीय ग्रुप $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \times_5)$ के सभी जनक ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that the order of every subgroup of finite group is a divisor of the order of the group.

सिद्ध कीजिए किसी परिमित ग्रुप के प्रत्येक उपग्रुप की कोटि ग्रुप की कोटि का भाजक होती है।

UNIT–II / इकाई– II

3. (a) Find the permutation group isomorphic to the group $[\{1, -1, i, -i\}, \times]$

ग्रुप $[\{1, -1, i, -i\}, \times]$ के तुल्याकारी क्रमचय ग्रुप ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that a homomorphism defined from a group G to a group G' is a monomorphism iff ker f = {e}, where 'e' is the identity of G.

सिद्ध करो कि किसी ग्रुप G से समूह G' पर परिभाषित समाकारिता f, एकैक समाकारिता होती है यदि और केवल यदि, f की अष्टि = {e} जहाँ e, G में तत्समक है।

4. (a) Prove that a subgroup H of a group G is a normal subgroup iff $H \triangleleft G \Leftrightarrow x H x^{-1} = H \quad \forall \ x \in G$

सिद्ध करो कि किसी ग्रुप G का कोई उपग्रुप H एक प्रसामान्य उपग्रुप होता है यदिदि –

$H \triangleleft G \Leftrightarrow x H x^{-1} = H \quad \forall \ x \in G$

(b) Find the quotient group G/H and also prepare its operation table when -

$G = [\{1, -1, i, -i\}, \times], H = [\{1, -1\}, \times]$

विभाग ग्रुप G/H ज्ञात कीजिए एवं G/H की संक्रिया सारणी भी बनाइये जबकि –

$G = [\{1, -1, i, -i\}, \times], H = [\{1, -1\}, \times]$

UNIT–III / इकाई– III

5. (a) Prove that the set R = {0, 1, 2, 3, 4] is a commutative ring for addition modulo $5(+_5)$ and multiplication modulo $5(\times_5)$. Is it an integral domain?

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय R = {0, 1, 2, 3, 4] योग मॉड्यूलों $5(+_5)$ और गुणन मॉड्युलों $5(\times_5)$ के लिए एक क्रमविनिमेय वलय है। क्या यह एक पूर्णांकीय प्रान्त है?

(b) Prove that the characteristic of an integral domain is either zero or a prime number.

सिद्ध करो कि किसी पूर्णांकीय प्रांत का अभिलक्षण या तो शून्य होता है या अभाज्य संख्या।

6. (a) Prove that the set S of all matrice of the form $\begin{bmatrix} a & b \\ o & c \end{bmatrix}$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ forms a subring of the ring R of all 2×2 matrices over the set of integers.

सिद्ध कीजिए कि $\begin{bmatrix} a & b \\ o & c \end{bmatrix}$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ प्रकार के सभी मैट्रिक्स का समुच्चय S, पूर्णांकों पर 2×2 कोटि के सभी मैट्रिक्स के वलय R का एक उपवलय है।

(b) Let R be a ring and $R' = \left\{\begin{pmatrix} a & o \\ o & o \end{pmatrix} \middle| a \in R\right\}$ (Where o is zero element of R) be ring of matrices. Prove that the mapping f from ring R' to R such that $f\begin{pmatrix} a & o \\ o & o \end{pmatrix} = a$ is one-one, onto and ring morphism.

मान लीजिए R कोई वलय है तथा $R' = \left\{\begin{pmatrix} a & o \\ o & o \end{pmatrix} \middle| a \in R\right\}$ (o वलय R में शून्य अवयव है) एक मैट्रिक्स वलय है सिद्ध करो कि प्रतिचित्रण $f : R \to R, f\begin{pmatrix} a & o \\ o & o \end{pmatrix} = a$ एक एकैकी, आच्छादक तथा वलय समाकारिता है।

UNIT–IV / इकाई– IV

7. (a) If U is an ideal of a ring R with unity

(i) if unity $1 \in U$, then prove that U=R, where 1 is the unity element of R.

(ii) with invertible element 'a' of the ring R, then prove that U = R.

यदि U किसी तत्समकी वलय R में एक ऐसी गुणजावली है –

(i) कि यदि $1 \in U$, तो सिद्ध करो कि U=R जहाँ 1, वलय R में तत्समक है।

(ii) इसमें एक व्युत्क्रमणीय अवयव a है, तो सिद्ध करो कि U = R

(b) Prove that a field has no proper ideals.

सिद्ध करो कि एक फील्ड की उचित गुणजावलियाँ नहीं होती है।

8. (a) Prove that every field is a vector space over its subfield.

सिद्ध करो कि प्रत्येक क्षेत्र अपने उपक्षेत्र पर सदिश समष्टि है।

(b) Let V be the set of all ordered pairs of real numbers and F be the field of real numbers. Examine whether V(F) is a vector space or not for the following defined operations.

(i) $(a, b) + (c, d) = (o, b+d)$; $p(a, b) = (pa, pb)$

(ii) $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$; $p(a, b) = (o, pb)$

$\forall a, b, c, d, p \in R$ (the set of real numbers)

माना कि V वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्मों का समुच्चय है तथा F वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है परीक्षण कीजिए कि निम्न प्रकार परिभाषित संक्रियाओं के V(F) एक सदिश समष्टि है या नहीं

(i) $(a, b) + (c, d) = (o, b+d)$; $p(a, b) = (pa, pb)$

(ii) $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$; $p(a, b) = (o, pb)$

$\forall a, b, c, d, p \in R$ यहाँ R एक वास्तविक समुच्चयों का समूह है।

UNIT–V / इकाई– V

9. (a) If possible express the vector $\alpha = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ in the vector space of 2×2 matrices, as linear combination of the following vectors -

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2×2 मैट्रिक्स सदिश समष्टि में यदि सम्भव है, तब सदिश $\alpha = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ को निम्न सदिशों के एक घात संचय में व्यक्त कीजिए।

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Show that the vectors (a_1, a_2) and (b_1, b_2) of the vector space $V_2(R)$ are linearly dependent iff $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि में $V_2(R)$ में सदिश (a_1, a_2) तथा (b_1, b_2) एक घाततः परतन्त्र है यदि और केवल यदि $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

10. (a) Prove that the set S ={a+ib, c+id} is a basis set of the vector space C(R) iff $ad - bc \neq 0$.

सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि C(R) का आधार समुच्चय S ={a+ib, c+id} है यदि और केवल यदि $ad - bc \neq 0$

(b) Define direct sum of its two subspaces in vector space. Prove that $R^3(R)$ is the direct sum of its two subspaces

$U = \{(a, b, o) ; a, b \in R\}$ and

$W = \{(o, o, c) ; c \in R$

किसी सदिश समष्टि में अपने दो उपसमष्टियों के अनुलोम योगफल को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि $R^3(R)$ अपनी दो उपसमष्टियों

$U = \{(a, b, o) ; a, b \in R\}$ तथा

$W = \{(o, o, c) ; c \in R$ का अनुलोम योगफल है।
