

This question paper contains 4 printed pages.

B.A./B.Sc. (Sem.-II)

Roll No. 134689.....

UG0803/UG9101

003384

MAT-52T-102

B.A./ B.Sc. Three/Four Year (Semester - II) EXAMINATION

SESSION 2023-24 (Held in Jul. 2024)

(Common to UG0806/UG0810/UG09102/UG9103/UG9104/UG9105/UG9107/

UG9108/UG9109/UG9110/UG9111/UG9112/UG9112/UG9113

(Faculty of Science)

Mathematics

Calculus

Time Allowed: Three Hours

Maximum Marks: 120

No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write the answers precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जाएगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

Answers of short answer type questions must be given in sequential order. Similarly all the parts of one question of descriptive part should be answered at one place in the answer-book.

लघुत्तरात्मक प्रश्नों के उत्तर, प्रश्नों के क्रमानुसार ही दें। इसी प्रकार किसी भी एक वर्णनात्मक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर क्रमानुसार हल करें।

Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

Question paper consists of Three parts A, B and C.

प्रश्न पत्र में तीन भाग अ, ब और स होंगे।

PART - A: 20 Marks भाग - अ : 20 अंक

Part A is compulsory having 10 very short answer-type question (with a limit of 20 words) of two marks each. The first question is based on knowledge, understanding and applications of the topics/text covered in the syllabus.

भाग अ में दो अंक के 10 अति लघुत्तरीय प्रश्न (20 शब्दों की सीमा के साथ) अनिवार्य हैं। पहला प्रश्न पाठ्यक्रम में शामिल विषयों/पाठ के ज्ञान, समझ और अनुप्रयोगों पर आधारित है।

PART - B: 20 Marks भाग - ब : 20 अंक

Part B has 4 questions (with a limit of 150 words) of 10 marks from each unit. The candidate is required to attempt any 2 questions.

प्रश्न पत्र के भाग ब में 10 अंक के 4 प्रश्न (150 शब्दों की सीमा के साथ) हैं। परीक्षार्थी को कोई भी 2 प्रश्न हल करने हैं।

PART - C: 80 Marks भाग – स : 80 अंक

Part C of the question paper is divided into four units comprising question numbers 6-9. There is one descriptive question from each unit with internal choice. Each question will carry 20 marks.

प्रश्न पत्र के भाग स को प्रश्न संख्या 6-9 सहित चार इकाइयों में विभाजित हैं। प्रत्येक इकाई से आंतरिक विकल्प के साथ एक वर्णनात्मक प्रश्न है। प्रत्येक प्रश्न 20 अंक का है।

PART - A/ भाग – अ

2x10=20

1. (a) Define Pedal equation.

पदिक समीकरण को परिभाषित कीजिए।

(b) Write the formula for radius of curvature for polar form of curve.

ध्रुवीय रूप के वक्र की वक्रता त्रिज्या ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

(c) Write second order differential coefficient of an implicit function.

अस्पष्ट फलन का द्वितीय कोटि का अवकल गुणांक लिखिए।

(d) Define asymptotes.

अनंत स्पर्शी को परिभाषित कीजिए।

(e) Write the relation between beta and gamma function.

बीटा तथा गामा फलन में संबंध लिखिए।

(f) Write Dirichlet's Integral and its value.

डिरिख्ले समाकल तथा उसका मान लिखिए।

(g) Write the power series expansion of $\log_e(1+x)$.

$\log_e(1+x)$ का घात श्रेणी प्रसार लिखिए।

(h) State Green's Theorem.

ग्रीन प्रमेय का कथन दीजिए।

(i) Define directional derivative.

दिक् अवकलज को परिभाषित कीजिए।

(j) Give the geometrical meaning of derivative of \vec{r}

सदिश \vec{r} के अवकलज की ज्यामितीय अर्थ लिखिए।

PART - B/ भाग - ब

10x2=20

2. If $f(x,y,z) = 3x^2yz + 5xy^2z + 4z^4$ then verify Euler's theorem.

यदि $f(x,y,z) = 3x^2yz + 5xy^2z + 4z^4$ हो तो आयलर प्रमेय सत्यापित कीजिए।

3. Find the envelope of the circle drawn upon the central radii of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ as diameters.

उन वृत्तों का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जो दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की ध्रुवांतर रेखाओं को व्यास मानकर खींचे गए हैं।

4. Evaluate :- (मान ज्ञात कीजिए) :-

$$\iiint_V x^2 dx dy dz$$

where the region V is enclosed by the planes $x=0, y=0, z=0,$ and $x+y+z=a, a>0.$

जहाँ क्षेत्र V तलों $x=0, y=0, z=0$ तथा $x+y+z=a, a>0$ से घिरा हुआ है।

5. If $\nabla^2 f(r) = 0$, show that $f(r) = \frac{c_1}{r} + c_2$ where $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ and c_1, c_2 are constants.

यदि $\nabla^2 f(r) = 0$, तो प्रदर्शित कीजिए $f(r) = \frac{c_1}{r} + c_2$ जहाँ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ तथा c_1, c_2 काँई अचर है।

PART - C/ भाग - स

6. Transform $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ into polar co-ordinates.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ को ध्रुवीय निर्देशाकों में रूपांतरित कीजिए।

OR/ अथवा

For the curve $r^n = a^n \cos n\theta$, prove that

(a) Radius of curvature = $\frac{a^n}{(n+1)r^{n-1}}$

(b) The chord of curvature through the pole = $\frac{2r}{n+1}$

(c) The distance between pole and centre of curvature = $\frac{[a^{2n} + (n^2 - 1)r^{2n}]^{1/2}}{(n+1)r^{n-1}}$

वक्र $r^n = a^n \cos n\theta$ के लिए सिद्ध कीजिए :-

(a) वक्रता त्रिज्या = $\frac{a^n}{(n+1)r^{n-1}}$

(b) ध्रुव से गुजरने वाली वक्रता जीवा की लंबाई = $\frac{2r}{n+1}$

(c) वक्रता केंद्र और ध्रुव के बीच की दूरी = $\frac{[a^{2n} + (n^2 - 1)r^{2n}]^{1/2}}{(n+1)r^{n-1}}$

7. Trace the following curve :-

निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए :-

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

OR/ अथवा

Find the rectangular parallelepiped of greatest volume inscribed in the ellipsoid whose equation is

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

अधिकतम आयतन वाला आयतफल ज्ञात कीजिए जो दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के अंतर्गत बनाया गया है।

8. The ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ revolves round its major axis. Find the surface area of the prolate spheroid generated.

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ दीर्घ अक्ष के सापेक्ष घूमता है। परिक्रमण दीर्घाक्ष गोलाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

OR/ अथवा

Evaluate following integral by changing to polar coordinates:

निम्न समाकल को ध्रुवीय निर्देशांकों में परिवर्तित कर मान ज्ञात कीजिए :

$$\iint_A \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$$

Where A is bounded by $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$

जहाँ A : $x \geq 0, y \geq 0$ तथा $x^2 + y^2 \leq 1$ से परिबद्ध है।

9. Verify Gauss's divergence theorem for $\vec{F} = (2x-z)\hat{i} + x^2y\hat{j} - xz^2\hat{k}$ taken over the region bounded by the planes $x=0, x=1; y=0, y=1; z=0, z=1$

समतलों $x=0, x=1; y=0, y=1; z=0, z=1$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर फलन $\vec{F} = (2x-z)\hat{i} + x^2y\hat{j} - xz^2\hat{k}$ के लिए गॉस अपसरण प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

OR/ अथवा

Prove that $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$

सिद्ध कीजिए $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$